非単連結空間上のゲージ理論の表現論的側面
—正準交換関係，量子代数，格子量子系への簡約—

新井朝雄*
北海道大学大学院理学研究科数学

概要

2次元平面から可算無限個の点を除いてできる非単連結空間の中を1個の量子力学的粒子が（非可換）ゲージ場と相互作用をする量子系を考察する．除かれた可算無限個の点において，ゲージ場は特異でありうるとする．ゲージ場が平坦な場合，粒子の位置演算子と物理的運動量演算子（速度演算子）の組は正準交換関係 (canonical commutation relations; CCR) の表現をあたえる．これが CCR の Schrödinger 表現の直和と同値であるための必要十分条件が平行移動子を用いて確立される．この場合，Schrödinger 表現の直和に非同値な表現は，物理的には（非可換な）Aharonov-Bohm 効果と対応していることが示される．ゲージ群が1次元ユニタリ群であって，ゲージ場の特異点が無限格子 L を形成する場合，(i) いま述べた CCR の表現から，量子平面，量子群 $U_q(sl_2)$ の $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上での表現が構成される；(ii) あるクラスのゲージ場（ベクトルポテンシャル）に対しては，考察下の連続的ゲージ理論の簡約部分として，格子空間 L 上の量子力学のモデル（Hofstadter 型モデル）が得られる．

1 序

本論文の考察の対象は，2次元平面 $\mathbf{R}^2$から，可算無限の点集合

$$\mathbf{D} := \{\mathbf{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}) \in \mathbf{R}^2 | n \in \mathbf{N}\} \tag{1.1}$$

$(\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ は自然数の集合) を除いてできる非単連結空間

$$\mathbf{M} := \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{D} \tag{1.2}$$

の中を1個の量子力学的粒子が（非可換）ゲージ場と相互作用をする量子系である．ゲージ場は各点 $\mathbf{a}_n$において特異でありうるとする．ゲージ群として p 次元ユニタリ群

*E-mail: arai@math.sci.hokudai.ac.jp

$U(p)$ にとる．このような量子系の状態のヒルベルト空間は，$\mathbf{M}$ 上の $\mathbf{C}^p$-値ボレル可測関数Ψでルベーグ測度に関して2乗可積分な関数から形成されるヒルベルト空間

$$L^2(\mathbf{M};\mathbf{C}^p)=\left\{\Psi:\mathbf{M}\to\mathbf{C}^p,\ \text{ボレル可測}\ \middle|\ \int_{\mathbf{M}}\|\Psi(\mathbf{r})\|_{\mathbf{C}^p}^2 d\mathbf{r}<\infty\right\} \tag{1.3}$$

にとるのが自然である[1]．しかし，$\mathbf{D}$ のルベーグ測度は0であるから，実は，自然な仕方で

$$L^2(\mathbf{M};\mathbf{C}^p)\cong L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^p) \tag{1.4}$$

という同一視ができる．

ゲージ場が平坦な場合（「平坦」の定義については，4.1項を参照），粒子の位置演算子と物理的運動量演算子（速度演算子）の組は，$L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^p)$ 上において，正準交換関係 (canonical commutation relations; CCR) の表現をあたえる．この表現の物理的興味は次の点にある．すなわち，それが Schrödinger 表現の直和と同値にならない場合，それは，Aharonov-Bohm (AB) 効果 [1, 29, 25] の数学的表現のひとつと見られる，ということである．こうして，AB効果は，量子力学の基本的原理であるCCRとその表現論の観点から，明晰に理解される[2]．この例は，ゲージ場に関わる諸々の物理的現象を表現論の観点から認識し理解することの有効性を示唆する[3]．本論文の目的は，いま言及したCCRの表現の解析と，これに関連する側面の研究について，主要な結果を報告することである [2, 3, 5, 6, 7, 9, 10]．

CCRの表現論においては，諸々の数学的概念の厳密な取扱いが必要不可欠である．そこで，ヒルベルト空間上の線形演算子の厳密な理論やCCRの表現論にあまりなじみのない読者のために，まず，第2節で，基本的な数学的概念の復習を行い，CCRの表現論における基礎的事実を述べる．

第3節は，本論文で扱うゲージ理論における物理的運動量演算子の基本的性質（本質的自己共役性，スペクトル）と物理的運動量演算子が生成する強連続1パラメーターユニタリ群の叙述に当てられる．

第4節で，上に言及したCCRの表現を論述する．この表現が Schrödinger 表現と同値であるための必要十分条件が平行移動子を用いて確立される．この場合，すでにふれたように，Schrödinger 表現の直和に同値でない表現は，物理的には（非可換な）AB効果と対応していることが示される．

---

[1] $L^2(\mathbf{M};\mathbf{C}^p)$ の元の間の相等は次のように定義されていることに注意：$\Psi=\Phi \iff \Psi(\mathbf{r})=\Phi(\mathbf{r})$, a.e. $\mathbf{r}\in\mathbf{M}$ (「a.e.」は almost everywhere（ほとんどいたるところ）の略であり，「a.e. $\mathbf{r}$」は「ルベーグ測度 $d\mathbf{r}$ に関してほとんどいたるところの点 $\mathbf{r}$ に対して」という意味)．言い換えると，$L^2(\mathbf{M};\mathbf{C}^p)$ は，$\mathbf{M}$ 上のルベーグ測度に関して2乗可積分な $\mathbf{C}^p$-値関数の全体 $\mathcal{L}^2(\mathbf{M};\mathbf{C}^p)$ そのものではなく（$\mathcal{L}^2(\mathbf{M};\mathbf{C}^p)$ はヒルベルト空間にならない），$\mathcal{L}^2(\mathbf{M};\mathbf{C}^p)$ を，ルベーグ測度に関してほとんどいたるところの点で等しい関数どうしは同じものとみなす，という同値関係で割って得られる同値類の集合なのである．なお，$p=1$ の場合は，$L^2(\mathbf{M};\,\mathbf{C})=L^2(\mathbf{M})$ と記す．

[2] この観点は，[28] において示唆された．

[3] 局所カレント代数の表現論的観点からのAB効果の記述が [16] に見られる．

第5節では，ゲージ群が1次元ユニタリ群の場合，すなわち，1個の荷電粒子が磁場と相互作用するような系を考察する．この場合には，さらに詳しいことがわかる．特に，ゲージ場（ベクトルポテンシャル）の特異点が無限格子を形成する場合，いま述べた CCR の表現から，量子平面，量子群 $U_q(sl_2)$ ($|q|=1$) の $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上での表現が構成される．これらの表現の特質のひとつは，それらが非自明な有限次元の不変部分空間をもたないという意味で，本質的に無限次元であることである．

最後の節において，関連する主題として，(i) 非相対論的ハミルトニアンと Dirac-Weyl 演算子の解析; (ii) 無限格子系上の量子力学との関連について簡単に述べる．後者については，ゲージ群が1次元ユニタリ群でベクトルポテンシャルの特異点の集合が無限格子 L である場合，あるクラスのベクトルポテンシャルに対しては，考察下の連続的ゲージ理論の簡約部分として，格子空間 L 上の量子力学モデル（ Hofstadter 型モデル）が得られることにふれる．

2 CCR の表現論の基礎

この節では，CCR の表現論においてよく知られた基本的事実を叙述する．序で述べたように，CCR の表現論においては，諸々の概念の数学的に厳密な取扱いが本質的に重要である．そこで，まず，いくつかの数学的概念の定義を復習することから始める[4]．

2.1 基本的な概念の復習

$\mathcal{H}$をヒルベルト空間とする．$\mathcal{H}$上の線形演算子 Tに対して，その定義域を $D(T)$ で表す．

$D(T)$ の点列 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset D(T)$ が $\lim_{n\to\infty}\psi_n = \psi \in \mathcal{H}, \lim_{n\to\infty} T\psi_n = \phi \in \mathcal{H}$をみたすならば，つねに，$\psi \in D(T)$ かつ $T\psi = \phi$が成立するとき，Tは**閉である** (closed) という．閉な線形演算子を**閉演算子** (closed operator) という．

$\mathcal{H}$上の二つの線形演算子 Tと Sについて，$D(T) \subset D(S)$ かつ任意の$\psi \in D(T)$ に対して，$T\psi = S\psi$が成り立つとき，Sは Tの**拡大** (extension) であるという．

線形演算子 Tと Sが等しいことは，$T \subset S$かつ $S \subset T$と同値である．

Dを線形演算子 Tの定義域 $D(T)$ に含まれる部分空間とする．このとき，$D(T_D) := D$, $T_D\psi := T\psi$, $\psi \in D$, によって，Dを定義域とする線形演算子 T_Dが定義される．明らかに，$T_D \subset T$．線形演算子 T_Dを Tの Dへの**制限** (restriction) または**縮小**という．

閉演算子の拡大をもつ線形演算子を**可閉演算子** (closable operator) という．

線形演算子 Tが可閉演算子のとき，次のような仕方で線形演算子$\bar{T}$が定義される：

$$D(\bar{T}) := \{\psi \in \mathcal{H} | \text{点列 } \{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset D(T) \text{ とベクトル} \phi \in \mathcal{H} \text{があって}$$

[4]詳しくは，拙著 [8] を参照されたい．

$$\psi_n \to \psi,\ T\psi_n \to \phi\ (n \to \infty)\},$$
$$\bar{T}\psi := \phi.$$

演算子$\bar{T}$をTの**閉包** (closure) という．容易にわかるように，$T \subset \bar{T}$.

$\mathcal{H}$上の線形演算子Tが**対称**（エルミート）[symmetric (Hermitian)] であるとは，$D(T)$が$\mathcal{H}$で稠密であり，すべての$\psi, \phi \in D(T)$に対して，$(\phi, T\psi) = (T\phi, \psi)$が成り立つときをいう．ここで，$(\cdot,\cdot)$は$\mathcal{H}$の内積を表す．この場合，一般には，$D(T) \subset D(T^*)$（$T^*$は$T$の共役演算子）であって，$D(T) = D(T^*)$であるとは限らないことに注意しよう[5]．稠密な定義域をもつ線形演算子Tが対称であることは，言い換えれば，$T \subset T^*$ということである．

Tが対称演算子であって，かつ$D(T) = D(T^*)$が成り立つとき，すなわち，$T = T^*$のとき，Tは**自己共役** (self-adjoint) であるという．

注意 2.1 定義域がヒルベルト空間全体である有界な対称演算子は自動的に自己共役である．だが，非有界な対称演算子は自己共役であるとは限らない．非有界な線形演算子については，対称性の概念と自己共役性の概念を峻別することは本質的に重要である[6]．

閉な対称演算子を**閉対称演算子**という．

対称演算子Tの閉包$\bar{T}$は閉対称演算子である．これが自己共役のとき，Tは**本質的に自己共役** (essentially self-adjoint) であるという．また，$D \subset D(T)$を稠密な部分空間とするとき，T_Dは対称演算子になるが，これが本質的に自己共役であるとき，TはD上で本質的に自己共役であるという．この場合，$\bar{T}_D = \bar{T}$が成り立つ．

$\mathbf{B}^d$をd次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^d$のボレル集合体（すなわち，$\mathbf{R}^d$の開集合全体から生成される最小の完全加法族）とし，$\mathsf{P}(\mathcal{H})$を$\mathcal{H}$上の正射影演算子の全体とする．$\mathbf{B}^d$から$\mathsf{P}(\mathcal{H})$への写像$E : B \to E(B) \in \mathsf{P}(\mathcal{H})$ $(B \in \mathbf{B}^d)$が次の条件 (E.1)–(E.3) をみたすとき，正射影演算子の族$\{E(B) | B \in \mathbf{B}^d\}$を$d$次元の**スペクトル測度**または**単位の分解**という：

(E.1) $E(\emptyset) = 0,\ E(\mathbf{R}^d) = I.$

(E.2) $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_n \cap B_m = \emptyset\,(n \neq m)\,(B_n \in \mathbf{B}^d,\ n = 1, 2, \cdots)$ならば，すべての$\psi \in \mathcal{H}$に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \left\| E(B)\psi - \sum_{n=1}^{N} E(B_n)\psi \right\| = 0.$$

---

[5]稠密な定義域をもつ線形演算子Sに対して，Sの共役演算子S^*は次のように定義される．

$$D(S^*) := \{\phi \in \mathcal{H} | \text{ベクトル}\eta_\phi \in \mathcal{H}\text{が存在して，すべての}\psi \in D(S)\text{に対して}\ (\eta_\phi, \psi) = (\phi, S\psi)\ \text{が成立}\},$$
$$S^*\phi := \eta_\phi, \quad \phi \in D(S^*).$$

（$D(S^*)$の定義の条件にいうベクトルη_ϕは，$D(S)$の稠密性により，ϕに対してただひとつ定まる.）

[6]たとえば，以下に述べるスペクトル定理が成立するのは自己共役演算子に対してだけである．

ここで，$\|\cdot\|$ は $\mathcal{H}$のノルムを表す．

(E.3) 任意の $B_1, B_2 \in \mathbf{B}^d$に対して，$E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2)$.

$\{E(B)|B \in \mathbf{B}^d\}$ を d 次元のスペクトル測度としよう．このとき，任意の$\psi \in \mathcal{H}$に対して，$\mu_\psi(B) := (\psi, E(B)\psi)$, $B \in \mathbf{B}^d$, とすれば，μ_ψは可測空間 $(\mathbf{R}^d, \mathbf{B}^d)$ 上の有界な測度である．任意の$\psi, \phi \in \mathcal{H}$に対して，

$$(\psi, E(B)\phi) = \frac{1}{4}\{\mu_{\psi+\phi}(B) - \mu_{\psi-\phi}(B) + i\mu_{\psi-i\phi}(B) - i\mu_{\psi+i\phi}(B)\}$$

が成り立つことに注意すれば，対応:$B \to (\psi, E(B)\phi)$ は可測空間 $(\mathbf{R}^d, \mathbf{B}^d)$ 上の有界な複素測度をあたえる．この測度による積分を$\int(\cdot)\,d(\psi, E(\lambda)\phi)$ のように表す．

自己共役演算子の重要性は，次の点にある．すなわち，任意の自己共役演算子 Tに対して，１次元のスペクトル測度 $\{E_T(B)|B \in \mathbf{B}^1\}$ がただひとつ存在して，すべての $\phi \in \mathcal{H}$と$\psi \in D(T)$ に対して

$$(\phi, T\psi) = \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d(\phi, E_T(\lambda)\psi) \tag{2.1}$$

が成り立つ，ということである．これをスペクトル定理という．式 (2.1) は，自己共役演算子 Tのスペクトル分解とかスペクトル表示ともばれ，通常，

$$T = \int_{\mathbf{R}} \lambda\, dE_T(\lambda)$$

と略記される[7].

2.2 CCR の表現

定義 2.1 d を 1 以上の自然数とし，Q_j, P_j, $j = 1, \cdots, d$, をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$上の自己共役演算子，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{H}$の稠密な部分空間とする．次の条件 (i), (ii) がみたされるとき，$\{\mathcal{H}, \mathcal{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ を自由度 d の **CCR** の表現という：

(i) $\mathcal{D} \subset \cap_{j,k=1}^d [D(Q_jP_k) \cap D(P_kQ_j) \cap D(Q_jQ_k) \cap D(P_jP_k)]$

(ii) $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$は，$\mathcal{D}$上で CCR をみたす：任意の$\psi \in \mathcal{D}$に対して，

$$[Q_j, P_k]\psi = i\hbar\delta_{jk}\psi, \tag{2.2}$$

$$[Q_j, Q_k]\psi = 0, \quad [P_j, P_k]\psi = 0, \quad j, k = 1, \cdots, d. \tag{2.3}$$

ここで，$\hbar = h/2\pi$ (h は Planck の定数)．

[7] $\mathcal{H}$が有限次元ならば，自己共役演算子 Tはエルミート行列で表される．この場合，線形代数学でよく知られているように，Tの相異なる固有値を$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, とし，固有値$\lambda_j$に属する固有空間への正射影演算子を P_jとすれば，スペクトル分解 $T = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$が成立する．この分解の無限次元への一般化がスペクトル定理である．

例 2.1 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ を $\mathbf{R}^d$上の無限回微分可能な関数でそのすべての偏導関数が急減少であるものの全体とする（Schwartz の急減少関数の空間）．$\mathbf{R}^d$の点を $x = (x_1, \cdots, x_d)$ のように表し $(x_j \in \mathbf{R}, j = 1, \cdots, d)$，変数 x_jに関する一般化された偏微分演算子（超関数的偏微分演算子）を D_jと記す．演算子 q_j, p_jを次のように定義する：

$$\begin{aligned} D(q_j) &:= \left\{ \Psi \in L^2(\mathbf{R}^d) \middle| \int_{\mathbf{R}^d} |x_j \Psi(x)|^2 dx < \infty \right\}, \\ (q_j \Psi)(x) &:= x_j \Psi(x), \quad \Psi \in D(q_j), \\ D(p_j) &= \left\{ \Psi \in L^2(\mathbf{R}^d) | D_j \Psi \in L^2(\mathbf{R}^d) \right\}, \\ p_j \Psi &= -i\hbar D_j \Psi, \quad \Psi \in D(p_j). \end{aligned}$$

このとき，q_j, p_jは自己共役であり，$\{L^2(\mathbf{R}^d), \mathcal{S}(\mathbf{R}^d), \{q_j, p_j\}_{j=1}^d\}$ は自由度 d の CCR の表現であることがわかる．この CCR の表現は **Schrödinger 表現**とよばれるもので，最も標準的な CCR の表現である．Schrödinger 流の量子力学は，この CCR の表現に基づくものである．Schrödinger 表現をあたえる自己共役演算子 q_j, p_jはそれぞれ，位置演算子,（自由粒子の）運動量演算子とよばれる．

CCR の Schrödinger 表現 $\{L^2(\mathbf{R}^d), \mathcal{S}(\mathbf{R}^d), \{q_j, p_j\}_{j=1}^d\}$ においては，q_j, p_jのいずれも非有界演算子である．実は一般的に次の事実を証明できる[8]:

命題 2.2 $\{\mathcal{H}, \mathcal{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ を自由度 d の CCR の表現とする．このとき，各 jに対して，Q_j, P_jの少なくとも一方は非有界である．

2.3 CCR の Weyl 形式と von Neumann の一意性定理

CCR の表現が二つあたえられたとき，それぞれの表現に基づいて展開される量子力学の内容が同じ物理的帰結をあたえるかどうかは物理的に重要な問題である．これは，数学的には CCR の表現の一意性の問題と関わる．この問題に関する結果を述べるために，言葉をいくつか用意する．

定義 2.3 $\{\mathcal{H}, \mathcal{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$，$\{\mathcal{H}', \mathcal{D}', \{Q'_j, P'_j\}_{j=1}^d\}$，を CCR の表現とする．このとき，ユニタリ変換 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$が存在して，演算子の等式

$$UQ_jU^{-1} = Q'_j, \quad UP_jU^{-1} = P'_j, \quad j = 1, \cdots, d,$$

が成立するならば，これらの表現は（ユニタリ）同値であるという．

注意 2.2 ヒルベルト空間形式の量子力学においては，同値な CCR の表現は（外見は異なっても）同じ物理を記述する．この意味で，同値な CCR の表現は同じ表現であるとみなされる．他方，同値でない CCR の表現は，異なる物理を記述すると解釈される．CCR の表現の一意性の問題は，CCR の同値な表現のクラス（表現の同値類）を決定する問題に他ならない．

[8]証明については，たとえば，[8, 命題 6.7] を参照．

定義 2.4 $\mathcal{H}$上の自己共役演算子の組 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$ に対して，次の (i), (ii) をみたす互いに直交する閉部分空間 $\mathcal{H}_n$, $n = 1, \cdots, N$, (Nは有限または可算無限) が存在するとき，$\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$を **Schrödinger** d-系という [26]：

(i) $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^N \mathcal{H}_n$.

(ii) 各 $\mathcal{H}_n$はすべての Q_j, P_jを簡約する[9].

(iii) Q_j, P_jの $\mathcal{H}_n$における部分を $Q_j^{(n)}, P_j^{(n)}$ とすれば，各 n に対して，ユニタリ変換 $U_n : \mathcal{H}_n \to L^2(\mathbf{R}^d)$ が存在して，演算子の等式

$$U_n Q_j^{(n)} U_n^{-1} = q_j, \quad U_n P_j^{(n)} U_n^{-1} = p_j, \quad j = 1, \cdots, n,$$

が成立する．

注意 2.3 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$が Schrödinger d-系であるというのは，平たく言えば，それが Schrödinger 表現の直和に同値であるということである．

Schrödinger 系でない，CCR の表現を単に**非同値表現**とよぶことにする．

CCR の表現の一意性の問題を考えるにあたっては，表現を実現する演算子の非有界性（命題2.2）がある種の困難を引き起こす．この困難を避けるひとつの方法は，CCR の表現 $\{\mathcal{H}, \mathcal{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ に対して，Q_j, P_jからつくられる何らかの有界演算子を用いて CCR を形式的に翻訳しなおし，そうして得られる有界演算子の代数の表現についてのユニタリ同値性を考察することである．Q_j, P_jは自己共役演算子であるから，スペクトル定理によって，スペクトル表示

$$Q_j = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, dE_{Q_j}(\lambda), \quad P_j = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, dE_{P_j}(\lambda),$$

をもつ．これを利用すると，演算子解析により，$\mathbf{R}$ 上の任意の有界な連続関数 fに対して，$\mathcal{H}$上の有界演算子 $f(Q_j), f(P_j)$ が

$$f(Q_j) = \int_{\mathbf{R}} f(\lambda) dE_{Q_j}(\lambda), \quad f(P_j) = \int_{\mathbf{R}} f(\lambda) dE_{P_j}(\lambda),$$

によって定義される[10]．fとして，$f(\lambda) = e^{it\lambda}$, $t \in \mathbf{R}$, を選べば，ユニタリ演算子

$$e^{itQ_j} := \int_{\mathbf{R}} e^{it\lambda} dE_{Q_j}(\lambda), \quad e^{itP_j} := \int_{\mathbf{R}} e^{it\lambda} dE_{P_j}(\lambda),$$

[9] A を $\mathcal{H}$上の自己共役演算子，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$の閉部分空間，$P_{\mathcal{M}}$を $\mathcal{M}$ 上の正射影演算子とする．任意の $\psi \in D(A)$ に対して，$P_{\mathcal{M}}\psi \in D(A)$ であって $AP_{\mathcal{M}}\psi = P_{\mathcal{M}}A\psi$ が成り立つとき，$\mathcal{M}$ は A を簡約する（あるいは A は $\mathcal{M}$ によって簡約される）という．この場合，$\mathcal{M}$ 上の演算子 $A_{\mathcal{M}}$が $D(A_{\mathcal{M}}) = D(A) \cap \mathcal{M}$, $A_{\mathcal{M}}\psi = A\psi$, $\psi \in D(A_{\mathcal{M}})$ によって定義され，自己共役であることが示される．この自己共役演算子 $A_{\mathcal{M}}$を A の $\mathcal{M}$ における（簡約）部分という．$\mathcal{M}$ が A を簡約すれば，$A : D(A) \cap \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，$A : D(A) \cap \mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M}^\perp$ という意味で，A は $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^\perp$を不変にする．だが，A が非有界な場合には，この逆は一般には成立しない．これは注意を要する事柄である（たとえば，[22, 2 章, §2.3] を参照）．

[10] 詳しくは，[8, 第 3 章, §3.3] を参照．

が得られる．ユニタリ演算子の族 $\{e^{itQ_j}\}_{t\in\mathbf{R}}, \{e^{itP_j}\}_{t\in\mathbf{R}}$は，それぞれ，$Q_j, P_j$によって生成される強連続 1 パラメーターユニタリ群とよばれる．CCR(2.2)，(2.3) をこれらの演算子の関係式へと形式的に翻訳すると

$$e^{itQ_j}e^{isP_k} = e^{-ist\hbar\delta_{jk}}e^{isP_k}e^{itQ_j}, \tag{2.4}$$
$$e^{itQ_j}e^{isQ_k} = e^{isQ_k}e^{itQ_j}, \quad e^{itP_j}e^{isP_k} = e^{isP_k}e^{itP_j},\ j,k=1,\cdots,d,\ s,t\in\mathbf{R}, \tag{2.5}$$

が得られる[11]．これらの関係式を **Weyl の関係式**という．CCR を実現する演算子の非有界性から生じる困難は，Weyl の関係式をみたす自己共役演算子の組 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$ を考察することにより回避される．そこで次の定義を設ける．

定義 2.5 Weyl の関係式をみたす自己共役演算子の組 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$ を自由度 d の **CCR の Weyl 型表現**という．

例 2.2 Schrödinger 表現 $\{q_j, p_j\}_{j=1}^d$は CCR の Weyl 型表現である． この事実は，よく知られた公式

$$(e^{itq_j}\Psi)(x) = e^{itx_j}\Psi(x), \tag{2.6}$$
$$(e^{itp_j}\Psi)(x) = \Psi(x_1,\cdots,x_j+\hbar t,\cdots,x_d), \quad \Psi\in L^2(\mathbf{R}^d),\ t\in\mathbf{R}, \tag{2.7}$$

を使えば，容易に確かめられる．

CCR の Weyl 型表現に関しては，次の定理の意味で一意性が成り立つ[12]:

定理 2.6 (von Neumann の一意性定理) ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$は可分であるとする．このとき，$\mathcal{H}$上で実現される，自由度 d の CCR の Weyl 型表現はすべて Schrödinger d-系である．

注意 2.4 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$上での CCR の Weyl 型表現とする．もし，すべての e^{itQ_j}, e^{isP_j}, $t,s\in\mathbf{R}, j=1,\cdots,d$, と可換な $\mathcal{H}$上の有界線形演算子が恒等演算子の定数倍に限られるならば，この CCR の Weyl 型表現は**既約**であるという．

CCR の Weyl 型表現としての Schrödinger 表現は既約であることが示される．したがって，定理 2.6 から次のことがわかる：$\mathcal{H}$が可分のとき，**既約な CCR の Weyl 型表現は Schrödinger 表現と同値である．**

[11] 自己共役演算子 A に対する形式的な展開 $e^{itA} = \sum_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ を用いればよい．ただし，A が非有界な場合，この展開は限られた部分空間上においてしか成立しないので，こうした展開の積に関わる形式的計算の数学的な正しさは保証されない．実際，以下に述べる定理 2.6 により，Schrödinger 表現の直和と同値でない CCR の場合，(2.4)，(2.5) はみたされない．

[12] 証明については，[23], [26] を参照．

CCR の表現の一意性に関して注意すべきことは，Weyl 型の表現ではなく，もともとの **CCR** の表現に関しては，**von Neumann** の一意性定理は一般には成立しないということである．実際，Schrödinger d-系でない CCR の表現，すなわち，非同値表現が存在する．次節以下において考察するゲージ理論に現れる CCR の表現はまさにそのような表現のクラスに属するのである（4 節を参照）[13]．

3 物理的運動量演算子の基本的性質

3.1 基本的な枠組み

序でふれたように，(1.2) によってあたえられる非単連結空間 $\mathbf{M}$ 上のゲージ理論で，ゲージ群が $U(p)$ であるものを考察する．ある数学的な技術上の理由から，この空間に関して次のことを仮定する：

仮定 (M)　各 $j=1,2$ に対して，数列 $\{a_{nj}\}_{n=1}^{\infty}$ は集積点をもたない．

この仮定により，$\mathbf{M}$ は開集合であることが示される．

p 次元ユニタリ群 $U(p)$ のリー環を $\mathsf{u}(p)$ で表す．これは $p\times p$ 反エルミート行列の全体である．ゲージ場(ゲージポテンシャル) A は，$\mathbf{M}$ 上の $\mathsf{u}(p)$-値 1 形式

$$A(\mathbf{r}) := A_1(\mathbf{r})dx + A_2(\mathbf{r})dy, \quad \mathbf{r}=(x,y)\in\mathbf{M}, \tag{3.1}$$

によってあたえられる．ここで，$A_j, j=1,2,$ は，$\mathbf{M}$ 上の $\mathsf{u}(p)$-値関数であり，連続微分可能であると仮定する．ゲージ場 A から，ゲージ場のの強さ (gauge field strength)F が

$$F := dA + A\wedge A \tag{3.2}$$

によって定義される．これは $\mathbf{M}$ 上の $\mathsf{u}(p)$-値 2 形式である．簡単な計算によって，

$$F_A := \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + [A_1, A_2] \tag{3.3}$$

とすれば ($\partial_1 := \partial/\partial x,\ \partial_2 := \partial/\partial y$)，

$$F = F_A dx\wedge dy \tag{3.4}$$

であることがわかる．

以下，$\hbar = 1$ となる単位系を用いる．

$\mathbf{M}$ の中をゲージ場 A と相互作用をしながら運動する量子力学的粒子を考える．序で述べたように，このような量子系の状態のヒルベルト空間として，$L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^p)\cong$

[13] もともとの CCR の表現に関して，von Neumann の一意性定理の結論を成立させるには，Q_j, P_j に付加的な条件を課す必要がある．この範疇での基本的な結果として，**Rellich-Dixmier** の定理がある（たとえば，[26] を参照）．

$L^2(\mathbf{M}; \mathbf{C}^p)$ をとることができる．この粒子の物理的運動量を $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ とすれば，各成分の演算子 P_jは，$L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^p)$ で働く演算子として，

$$P_1 = p_1 - iA_1, \quad P_2 = p_2 - iA_2,$$

によって定義される．ここで，p_jは CCR の Schrödinger 表現における運動量演算子（例 2.1 で $d = 2$ の場合）である[14]．

この節では，P_jに関して，ゲージ場 A の詳細によらない性質を調べる．

3.2 物理的運動量演算子の本質的自己共役性とスペクトル

P_jが対称演算子であることは容易にわかる．これが物理量であることを保証するためには，その本質的自己共役性を示さなければならない．これに関する結果を述べるために，いくつか言葉を用意する．

p 行 p 列の複素行列の全体を $M_p(\mathbf{C})$ で表す．$a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とし，$B : [a, b] \to M_p(\mathbf{C})$ を閉区間 $[a, b]$ 上の $M_p(\mathbf{C})$-値関数で連続かつ区分的に微分可能なものとする．$\{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ を $[a, b]$ の分割で

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b, \quad \max_{k=1,\cdots,n} |s_k - s_{k-1}| \to 0 \ (n \to \infty),$$

をみたすものとする．このとき，Bに対する**乗積積分** (product integral) $\prod_a^b e^{B(s)ds}$が

$$\prod_a^b e^{B(s)ds} = \lim_{n\to\infty} e^{B(s_n)(s_n - s_{n-1})} e^{B(s_{n-1})(s_{n-1} - s_{n-2})} \cdots e^{B(s_1)(s_1 - s_0)} \tag{3.5}$$

によって定義される [12]．

Cを $\mathbf{M}$ の中の連続で区分的に微分可能な曲線とし，その媒介変数表示が$\gamma(\tau) = (\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau)), \tau \in [a, b]$ $(a < b, a, b \in \mathbf{R})$ であたえられるとする．$\mathsf{u}(p)$-値 1 形式 A の，Cに沿っての線積分を$\int_C A$ と記す．区間 $[a, b]$ 上の $\mathsf{u}(p)$-値関数:

$$\tau \to -\{A_1(\gamma(\tau))\dot{\gamma}_1(\tau) + A_2(\gamma(\tau))\dot{\gamma}_2(\tau)\}$$

$(\dot{\gamma}_j(\tau) := d\gamma_j(\tau)/d\tau, j = 1, 2)$ の乗積積分

$$W_A[C] := \prod_a^b e^{-\{A_1(\gamma(\tau))\dot{\gamma}_1(\tau) + A_2(\gamma(\tau))\dot{\gamma}_2(\tau)\}d\tau} \tag{3.6}$$

を曲線 Cに沿っての**平行移動子** (parallel transporter) とよぶ．これは，物理学の文献で，通常，

$$W_A[C] = Pe^{-\int_C A} \tag{3.7}$$

と表記される（Pは "path-ordered"の意）．容易にわかるように，$W_A[C] \in U(p)$ が成り立つ．

[14] 演算子 T, Sの和 $T + S$の定義域は，特に断らない限り，$D(T) \cap D(S)$ であるとする．

注意 3.1 $W_A[C]$ の幾何学的意味．点 $\mathbf{r}$ におけるファイバー $\mathbf{C}^p$を $V_{\mathbf{r}}$ で表そう．曲線 C の始点を $\mathbf{a}$，終点を $\mathbf{b}$ とすれば，このとき，$W_A[C]$ は，A を接続形式として，$V_{\mathbf{a}}$のベクトルを $V_{\mathbf{b}}$のベクトルに平行移動する演算子である（たとえば，[15, 4 章] を参照）．

注意 3.2 任意の $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbf{M}$ と $j, k = 1, 2$ に対して，$A_j(\mathbf{r})$ と $A_k(\mathbf{r}')$ が可換ならば，すなわち，$[A_j(\mathbf{r}), A_k(\mathbf{r}')] = 0$ ならば，

$$W_A[C] = e^{-\int_C A}$$

となる．

Dを $\mathbf{R}^2$の開集合とする．D上の $\mathbf{C}^p$-値関数で m 回連続微分可能なものの全体を $C^m(D; \mathbf{C}^p)$ によって表す（$m \geq 0$）．関数空間 $C^m(D; \mathbf{C}^p)$ の元で，その台が Dの内部に含まれる有界集合となるようなものの全体を $C_0^m(D; \mathbf{C}^p)$ と記す．

$\mathbf{M}$ の部分集合を二つ導入する：

$$\mathbf{M}_1 := \{(x, y) \in \mathbf{M} | y \neq a_{n2}, n \in \mathbf{N}\}, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{M}_2 := \{(x, y) \in \mathbf{M} | x \neq a_{n1}, n \in \mathbf{N}\}, \tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

とおく．仮定 (M) によって，各 $\mathbf{M}_j$は $\mathbf{R}^2$の開集合である．

点 $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^2$から $\mathbf{r}' \in \mathbf{R}^2$へと至る直線を $L_{\mathbf{r};\mathbf{r}'}$によって表す．

$(x, y) \in \mathbf{M}_1$ ($\mathbf{M}_2$) ならば，すべての$\tau \in \mathbf{R}$ に対して，$(\tau x, y) \in \mathbf{M}_1$ [$(x, \tau y) \in \mathbf{M}_2$] であることに注意して，$\mathbf{M}_j$上の $U(p)$-値関数 g_j $(j = 1, 2)$ を

$$g_1(x, y) := W_A[L_{(0,y);(x,y)}]^{-1}, \quad g_2(x, y) := W_A[L_{(x,0);(x,y)}]^{-1}, \tag{3.11}$$

によって定義する．このとき，乗積積分の基本定理 [12, Theorems 2.1, 5.2, 5.3] を応用することにより，$g_j \in C^1(\mathbf{M}_j; \mathbf{C}^p)$ かつ

$$\partial_j g_j(\mathbf{r}) = g_j(\mathbf{r}) A_j(\mathbf{r}) \tag{3.12}$$

であることが示される．

集合 $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_j$の 2 次元ルベーグ測度は 0 であるので，関数 g_jは，$L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^p)$ 上のかけ算ユニタリ演算子$\hat{g}_j$を一意的に定義する:

$$(\hat{g}_j \Psi)(\mathbf{r}) := g_j(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}), \quad \Psi \in L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^p), \ \mathbf{r} \in \mathbf{M}_j. \tag{3.13}$$

(3.12) を利用して，次の定理を証明することができる．

定理 3.1 各 P_jは $C_0^1(\mathbf{M}_j; \mathbf{C}^p)$ 上で本質的に自己共役であり，演算子の等式

$$\bar{P}_j = \hat{g}_j^{-1} p_j \hat{g}_j, \quad j = 1, 2, \tag{3.14}$$

が成り立つ．

証明(概略) まず，(3.12) によって，任意の$\Psi \in C_0^1(\mathbf{M}_j;\mathbf{C}^p)$ に対して，

$$P_j\Psi = \hat{g}_j^{-1}p_j\left(\hat{g}_j\Psi\right) \tag{3.15}$$

が成立する．ユニタリ演算子$\hat{g}_j$は $C_0^1(\mathbf{M}_j;\mathbf{C}^p)$ からそれ自体への全単射である．他方，p_jが $C_0^1(\mathbf{M}_j;\mathbf{C}^p)$ 上で本質的に自己共役であることを示すのはそれほど難しくない．ゆえに，(3.15) は，P_jが $C_0^1(\mathbf{M}_j;\mathbf{C}^p)$ 上で本質的に自己共役であることを意味する．これがひとたびわかれば，ベクトル方程式 (3.15) に現れる両辺の演算子の閉包を考察することにより，演算子の等式 (3.14) が得られる．■

定理 3.1 から，自己共役演算子$\bar{P}_j$のスペクトルの性質がわかる．自己共役演算子 T に対して，そのスペクトル，絶対連続スペクトル，特異連続スペクトル，点スペクトルをそれぞれ，$\sigma(T)$, $\sigma_{\mathrm{ac}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{sc}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ で表す．

定理 3.2 各 $j=1,2$ に対して，

$$\sigma(\bar{P}_j) = \sigma_{\mathrm{ac}}(\bar{P}_j) = \mathbf{R},\ \sigma_{\mathrm{sc}}(\bar{P}_j) = \sigma_{\mathrm{p}}(\bar{P}_j) = \emptyset. \tag{3.16}$$

証明 (3.14) により，$\sigma_{\#}(\bar{P}_j) = \sigma_{\#}(p_j)$．他方，よく知られているように，$\sigma(p_j) = \sigma_{\mathrm{ac}}(p_j) = \mathbf{R}$, $\sigma_{\mathrm{sc}}(p_j) = \sigma_{\mathrm{p}}(p_j) = \emptyset$．ゆえに，(3.16) が成立する．■

3.3 物理的運動量演算子が生成する強連続 1 パラメーターユニタリ群

定理 3.1 により，物理的運動量演算子の閉包$\bar{P}_j$ は自己共役であるので，これが生成する強連続 1 パラメーターユニタリ群

$$T_j(t) := e^{it\bar{P}_j}, \quad t\in\mathbf{R}, \tag{3.17}$$

を考えることができる．

定理 3.3 すべての$\Psi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ と $t\in\mathbf{R}$ に対して，

$$(T_1(t)\Psi)(x,y) = W_A\left[L_{(x+t,y);(x,y)}\right]\Psi(x+t,y), \quad \text{a.e.}\,(x,y)\in\mathbf{R}^2, \tag{3.18}$$

$$(T_2(t)\Psi)(x,y) = W_A\left[L_{(x,y+t);(x,y)}\right]\Psi(x,y+t), \quad \text{a.e.}\,(x,y)\in\mathbf{R}^2. \tag{3.19}$$

証明 [5, Theorem 2.2] の証明を参照．■

注意 3.3 注意3.1 を考慮すると，(3.18) は次のような幾何学的意味をもつ：a.e. $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ に対して，$(T_1(t)\Psi)(x,y)$ は，$V_{(x+t,y)}$のベクトル$\Psi(x+t,y)$ を直線 $L_{(x+t,y);(x,y)}$に沿って平行移動して得られる，$V_{(x,y)}$のベクトルを表す．式 (3.19) についても同様．

定理 3.3 を用いると，$T_1(s)$ と $T_2(t)$ の交換関係を求めることができる．その結果を述べるためにいくつかの対象を導入する．

実数 t, s に対して，

$$\mathbf{M}_{s,t} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \neq a_{n1}, a_{n1} - s,\ y \neq a_{n2}, a_{n2} - t,\ n \in \mathbf{N}\} \tag{3.20}$$

とおく．$\mathbf{M}_{s,t}$の点 (x,y) を出発して，$(x,y) \to (x+s,y) \to (x+s,y+t) \to (x,y+t) \to (x,y)$ のように点 (x,y) にもどる，長方形の閉曲線を $C_{x,y;s,t}$とする（図 1 を参照）：

$$C_{x,y;s,t} := L_{(x,y);(x+s,y)} \circ L_{(x+s,y);(x+s,y+t)} \circ L_{(x+s,y+t);(x,y+t)} \circ L_{(x,y+t);(x,y)}. \tag{3.21}$$

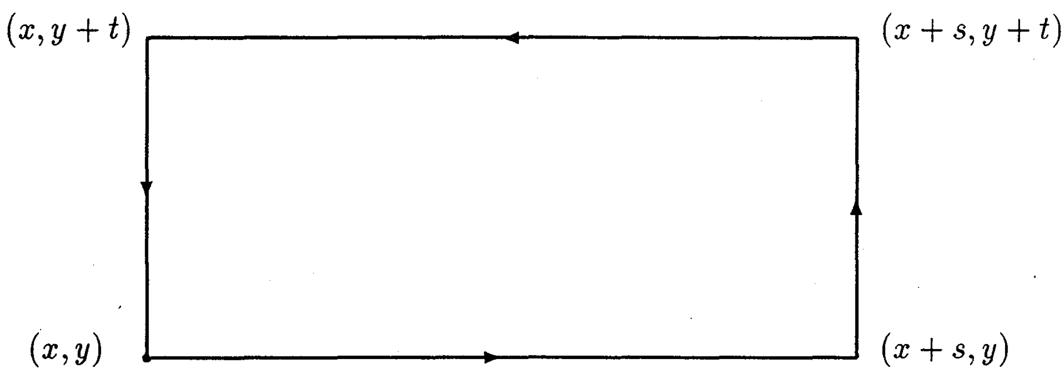

図 1: 閉曲線 $C(x,y;s,t)$ ($s,t > 0$ の場合)

この閉曲線に対応して，$\mathbf{M}_{s,t}$上の $U(p)$-値関数を

$$W^A_{s,t}(x,y) = W_A\left[C(x,y;s,t)\right], \quad (x,y) \in M_{s,t},$$

によって定義することができる（$(x,y) \in \mathbf{M}_{s,t}$ならば，$C(x,y;s,t)$ は $\mathbf{D}$ と交わらないことに注意）．任意の $s,t \in \mathbf{R}$ に対して，$W^A_{s,t}$は $\mathbf{M}_{s,t}$上の $U(p)$-値連続関数である．

集合 $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{M}_{s,t}$の 2 次元ルベーグ測度は 0 であるから，関数 $W^A_{s,t}$によるかけ算演算子は $L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^p)$ 上のユニタリ演算子を一意的に定義する．このユニタリ演算子を$\hat{W}^A_{s,t}$で表す．

定理 3.4 すべての $s,t \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\hat{W}^A_{s,t} T_1(s) T_2(t) = T_2(t) T_1(s) \tag{3.22}$$

が成立する．

q_1, q_2を自由度２の CCR の Schrödinger 表現における位置演算子とする（例 2.1 で $d=2$ の場合）．それぞれが生成する強連続１パラメターユニタリ群を

$$S_j(t) := e^{itq_j}, \quad t \in \mathbf{R},\ j = 1, 2, \tag{3.23}$$

としよう．これらと $T_j(t)$ の交換関係は次の定理によってあたえられる．

定理 3.5 すべての $s, t \in \mathbf{R}$ に対して

$$S_j(s)T_k(t) = e^{-i\delta_{jk}st}T_k(t)S_j(s), \quad j, k = 1, 2. \tag{3.24}$$

4　ゲージ理論における CCR の表現

4.1　一般的構造

容易にわかるように，$C_0^2(\mathbf{M};\ \mathbf{C}^p)$ 上で次の交換関係が成り立つ：

$$[q_j, P_k] = i\delta_{jk}, \quad [P_1, P_2] = -F_A. \tag{4.1}$$

これからわかるように，もし，$F_A = 0$（これは $F = 0$ と同値）ならば，演算子の組 $\{q_j, P_j\}_{j=1}^2$は $C_0^2(\mathbf{M};\ \mathbf{C}^p)$ 上で CCR をみたす．

ところで，微分幾何学で知られているように，$F = 0$ のとき，A は（$\mathbf{M}$ 上で）平坦 (flat) であるといわれる．

すでに見たように，$\bar{P}_j$は自己共役である．こうして次の事実が確認される：

命題 4.1

$$\pi_A := \{L^2(\mathbf{R}^2;\ \mathbf{C}^p), C_0^2(\mathbf{M};\ \mathbf{C}^p), \{q_j, \bar{P}_j\}_{j=1}^2\} \tag{4.2}$$

が自由度２の CCR の表現であるための必要十分条件は，A が平坦であることである．

注意 4.1 A が平坦の場合でも，$\mathbf{M}$ が非単連結であるために，考察下のゲージ理論は自明なものになるとは限らない（後の注意 4.3 を参照）．

命題 4.1 により，A が平坦な場合，π_Aは自由度２の CCR の表現をあたえる．そこで，次の問題は，この表現が Schrödinger 系であるための必要十分条件を求めることである．そのためには，von Neumann の一意性定理に留意し，$\{q_j, \bar{P}_j\}_{j=1}^2$が CCR の Weyl 型表現になるための必要十分条件を考察すればよい．

定理 3.4 と定理 3.5 から次の定理が得られる．

定理 4.2 $\{q_j, \bar{P}_j\}_{j=1}^2$が CCR の Weyl 型表現になるための必要十分条件は，すべての $s, t \in \mathbf{R}$ に対して，$\hat{W}_{s,t}^A = I$が成立することである．

注意 4.2 定理 4.2 においては，A が平坦であることを仮定する必要はない．

定理 4.2 から次の結果が得られる．

定理 4.3 A は平坦であるとする．このとき，CCR の表現π_Aが Schrödinger 2-系であるための必要十分条件は，すべての $s,t\in\mathbf{R}$ に対して，$\hat{W}^A_{s,t}=I$が成立することである．

こうして，CCR の表現π_Aが Schrödinger 2-系であるか否かは，閉曲線 $C(x,y;s,t)$ に対する平行移動子によって完全に特徴づけられる．

注意 4.3 A が平坦で，$\mathbf{R}^2$全体で連続微分可能である場合は，すべての $s,t\in\mathbf{R}$ に対して，$\hat{W}^A_{s,t}=I$となることが示される．したがって，この場合は，CCR の表現π_Aは Schrödinger 2-系になり，この表現から展開される量子力学の内容は自由粒子の理論と同等になる．ゆえに，CCR の表現π_Aによって展開されるゲージ理論が非自明であるためには，ゲージ場 A が $\mathbf{D}$ の中の少なくともひとつの点で特異であることが必要である．実際，そのようなゲージ場 A で CCR の表現π_Aが Schrödinger 2-系でないものはたくさん存在する（以下の 5.3 項および [5, §V] を参照）．

4.2 AB 効果との照応

定理 3.4 より，すべての $s,t\in\mathbf{R}$ と$\Psi\in L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^p)$ に対して，

$$(T_1(s)T_2(t)\Psi)(x,y)=W^A_{s,t}(x,y)^{-1}(T_2(t)T_1(s)\Psi)(x,y),\quad \text{a.e.}\,(x,y). \tag{4.3}$$

注意 3.3 によって，左辺（右辺）は，$V_{(x+s,y+t)}$のベクトル$\Psi(x+s,y+t)$ を曲線 $L_{(x+s,y+t);(x+s,y)}\circ L_{(x+s,y);(x,y)}$（$L_{(x+s,y+t);(x,y+t)}\circ L_{(x,y+t);(x,y)}$）に沿って平行移動して得られるベクトルを表す．式 (4.3) は，これら二つの平行移動における，波動関数Ψの位相のずれがユニタリ行列 $W^A_{s,t}(x,y)^{-1}$によってあたえられることを示している．他方，A が平坦であれば，$\mathbf{M}$ の中に存在する量子力学的粒子はゲージ場の強さ F（$p=1$ の場合で言えば，磁場）とは相互作用をしない．しかし，この場合でも，$W^A_{s,t}(x,y)^{-1}$は，恒等的に単位行列であるとは限らず，非自明な位相のずれをあたえうる．この意味での非自明な位相のずれの生起に対応する現象は，AB 効果とよばれる[15]．

定理 4.3 は次のことを意味する：AB 効果は CCR の表現π_Aが非同値な表現（非 Schrödimger 2-系の表現）となる場合によって記述される．

[15] この効果は，本来，磁場と荷電粒子の相互作用に関わる量子力学的現象であり，理論的には，$p=1$ の場合のゲージ理論，すなわち，$U(1)$-ゲージ理論によって記述される [1, 29, 25]．AB 効果の実験的な側面については，たとえば，[24] の 6 章，7 章を参照．だが，ここでは，この概念を一般のゲージ理論へと拡張して用いる．そうすることにより，たとえば，クォークに関する “AB 効果” を語ることも可能になるであろう．

4.3 平行移動子の条件

すべての $s,t \in \mathbf{R}$ に対して，$\hat{W}^A_{s,t} = I$が成立する条件を計算しやすい別の形に言い換えることを考える．

中心が $\mathbf{a}_n$，半径が$\varepsilon > 0$，始点と終点が $\mathbf{r}$ ($|\mathbf{r} - \mathbf{a}_n| = \varepsilon$) の円周を $C^{\mathbf{r}}_\varepsilon(\mathbf{a}_n)$ で表す（回る向きは反時計回りで，その回数は1回とする）．仮定 (**M**) により，

$$\delta_0 := \inf_{n \neq m;\ n,m \in \mathbf{N}} |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m| > 0.$$

次の事実を証明できる．

定理 4.4 すべての $s,t \in \mathbf{R}$ に対して，$\hat{W}^A_{s,t} = I$が成り立つための必要十分条件は，A が平坦であり，かつ定数$\delta \in (0, \delta_0)$ と $|\mathbf{r}_n - \mathbf{a}_n| = \varepsilon$をみたす $\mathbf{r}_n \in \mathbf{R}^2$ が存在して，すべての$\varepsilon < \delta$に対して，

$$W_A[C^{\mathbf{r}_n}_\varepsilon(\mathbf{a}_n)] = I, \quad n \geq 1,$$

が成立することである．

この定理は，乗積積分に関するいくつかの結果を援用することにより証明される（[5, §III] を参照）．

定理 4.3 と定理 4.4 から次の結果を得る．

定理 4.5 A は平坦であるとする．このとき，CCR の表現π_A が Schrödinger 2-系であるための必要十分条件は，定数$\delta \in (0, \delta_0)$ と $|\mathbf{r}_n - \mathbf{a}_n| = \varepsilon$をみたす $\mathbf{r}_n \in \mathbf{R}^2$ が存在して，すべての$\varepsilon < \delta$に対して，

$$W_A[C^{\mathbf{r}_n}_\varepsilon(\mathbf{a}_n)] = I, \quad n \geq 1,$$

が成立することである．

注意 4.4 ゲージ場が平坦な場合，ゲージ場の強さの成分 F_Aは $\mathbf{D}$ の部分集合に集中している．したがって，F_Aは，$\mathbf{R}^2$上の $\mathbf{C}^p$-値超関数としては，点 $\mathbf{a}_n, n = 1, 2, \cdots$, に質量をもつデルタ超関数とその微分の一次結合で表される．これは，物理的にはある種の理想化とみなされる．しかし，F_Aの存在する領域が孤立点の集合ではなく，正のルベーグ測度をもつ開集合である場合にも，この節の考え方をすこし変形することにより，CCR の表現論の観点から AB 効果を考察することは可能である．この方向の研究は，$p = 1$ の場合，[17] においてなされた．

5 $U(1)$-ゲージ理論の場合

この節では，$p=1$ の場合（$U(1)$-ゲージ理論），すなわち，1個の荷電粒子が磁場と相互作用をする量子系の場合を考察する．この場合，$\mathbf{M}$ 上の磁場 Bは

$$B = iF_A = i(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \tag{5.1}$$

によってあたえられ，磁場のベクトルポテンシャルは (iA_1, iA_2) である（iA_jが実数値関数となることに注意）．

5.1 CCR の表現と磁束の局所的量子化

$p=1$ の場合，曲線 Cに対する平行移動子は，

$$W_A[C] = e^{i\Phi_A[C]} \tag{5.2}$$

と書ける．ただし，

$$\Phi_A[C] := i\int_C A \tag{5.3}$$

であり，これは物理的には，Cの内部を貫く磁束を表す．したがって，

$$W_{s,t}^A = e^{i\Phi_{s,t}^A}, \quad s,t \in \mathbf{R}. \tag{5.4}$$

ただし，

$$\Phi_{s,t}^A(x,y) := \Phi^A[C(x,y;\, s,t)]. \tag{5.5}$$

ゆえに，すべての $s,t \in \mathbf{R}$ に対して，$\hat{W}_{s,t}^A = I$が成立することと実数値関数$\Phi_{s,t}^A$がすべての $s,t \in \mathbf{R}$ に対して，$2\pi\mathbf{Z}$-値であることとは同値である．後者が成立するとき，**磁束は局所的に量子化されている**ということにする．この概念を用いると，定理 4.3 は次のように言い換えられる：

定理 5.1 Aは平坦であるとき，CCR の表現π_Aが Schrödinger 2-系であるための必要十分条件は，磁束が局所的に量子化されていることである．

5.2 既約性

$U(1)$-ゲージ理論の場合は，CCR の表現π_A について，ある種の既約性を証明することができる．このことを正確に述べるために言葉を用意する．$L^2(\mathbf{R}^2)$ 上の有界線形演算子の全体を $\mathbf{B}(L^2(\mathbf{R}^2))$ で表す．

演算子の集合

$$\mathcal{L}_A := \{q_j, \bar{P}_j\}_{j=1}^2 \tag{5.6}$$

に対して，その弱可換子集合 (weak commutant) が

$$\mathcal{L}'_A := \{T \in \mathbf{B}(L^2(\mathbf{R}^2)) | (T\Psi, S\Phi) = (TS\Psi, \Phi),\ \Psi, \Phi \in C_0^2(\mathbf{M}),\ S \in \mathcal{L}_A\} \tag{5.7}$$

によって定義される．また，ユニタリ演算子の集合

$$\mathcal{W}_A := \{S_j(t), T_j(t) | t \in \mathbf{R},\ j = 1, 2\} \tag{5.8}$$

の可換子代数

$$\mathcal{W}'_A := \{T \in \mathbf{B}(L^2(\mathbf{R}^2)) | TS = ST,\ S \in \mathcal{W}_A\} \tag{5.9}$$

を導入する．このとき，

$$\mathcal{W}'_A \subset \mathcal{L}'_A \tag{5.10}$$

であることは容易にわかる．演算子の集合 $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{W}_A$は次の定理に述べる意味で既約である．

定理 5.2 ([21]) $\mathcal{L}'_A = \mathcal{W}'_A = \mathbf{C}I$.

この定理から，CCR の表現π_Aが Schrödinger 2-系である場合（したがって，Weyl 型である場合），それは既約であり，ゆえに，Schrödinger 表現 $\{q_j, p_j\}_{j=1}^2$ に同値である．この事実と定理 5.1 を合わせると次の結果が得られる．

定理 5.3 A は平坦であるとき，CCR の表現π_Aが Schrödinger 表現に同値であるための必要十分条件は，磁束が局所的に量子化されていることである．

5.3 非同値表現の例の構成

磁束が局所的に量子化されておらず，しかも平坦であるベクトルポテンシャルは，実際，無限に多く存在すること，したがって，Schrödinger 表現に同値でない CCR の表現π_A(非同値表現）が無数に存在することを示そう．

点 $\mathbf{a}_n$に対応する複素平面の点を $a_n = a_{n1} + ia_{n2}$で表し，

$$M := \mathbf{C} \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.11}$$

とおく．$|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$と仮定して一般性を失わない．仮定 (M) によって，$|a_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ である．各 n に対して，関数

$$P_n(z) := \frac{c_{n,1}}{z - a_n} + \frac{c_{n,2}}{(z - a_n)^2} + \cdots + \frac{c_{n,k_n}}{(z - a_n)^{k_n}}$$

を考える．ここで，$k_n \in \mathbf{N}$，$c_{n,j} \in \mathbf{C}$ $(j = 1, \cdots k_n)$ は任意の定数である．Mittag-Leffler 定理によって，次の性質 (i), (ii) をもつ有理型複素関数 $f(z)$ が存在する：

(i) fは M上で正則．

(ii) $z=a_n$における fの主要部は $P_n(z)$ である．

この関数 fを用いて，A_1, A_2 を

$$A_1(x,y)=-i\Im f(x+iy), \quad A_2=-i\Re f(x+iy), \tag{5.12}$$

によって定義する．このとき，fに対するコーシー-リーマン方程式は，M上での方程式

$$\partial_1 A_2-\partial_2 A_1=0, \quad \partial_1 A_1+\partial_2 A_2=0, \tag{5.13}$$

を導く．したがって，特に，$A=A_1dx+A_2dy$は平坦である．さらに，留数定理を応用すれば，

$$\Phi^A_{s,t}(x,y)=2\pi\sum_{\mathbf{a}_n\in D(x,y;s,t)}\Re\, c_{n,1}, \quad (x,y)\in\mathbf{M}_{s,t}, \tag{5.14}$$

であることがわかる．ここで，$D(x,y;s,t)$ は $C(x,y;s,t)$ の内部領域を表す．したがって，$\Re\, c_{n,1}$が整数とならない n がひとつでもあれば，磁束は局所的に量子化されない．こうして，各特異点 $\mathbf{a}_n$における磁束の値の取り方に応じて，CCR の非同値表現が無限に多く存在することがわかる．

5.4 量子平面，量子群の表現

$\omega_1>0,\omega_2>0$ を定数として，集合 $\mathbf{D}$ が無限格子

$$L(\omega_1,\omega_2):=\{\boldsymbol{\Omega}_{m,n}:=(m\omega_1,n\omega_2)|m,n\in\mathbf{Z}\} \tag{5.15}$$

の場合を考えよう．

$$\Omega_{m,n}=m\omega_1+in\omega_2 \tag{5.16}$$

とし，

$$M_L:=\mathbf{C}\setminus\{\Omega_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{Z}} \tag{5.17}$$

とおく．M_Lで正則な有理型関数 fで，点$\Omega_{m,n}$における留数の実部が m,n によらず一定の値 c をとるものを任意に選ぶ[16]．5.3 項の例と同様に，(5.12) によって，A_1,A_2を定義する．$\mathbf{D}=L(\omega_1,\omega_2)$ の場合の集合 $\mathbf{M}_{s,t}$を $\mathbf{M}^L_{s,t}$ としよう．このとき，(5.14) によって，

$$\Phi^A_{s,t}(x,y)=2\pi c\sum_{\boldsymbol{\Omega}_{m,n}\in D(x,y;s,t)}1, \quad (x,y)\in\mathbf{M}^L_{s,t}.$$

[16]このような関数 fの典型的な例としては，たとえば，$\Omega_{m,n}$, $m,n\in\mathbf{Z}$, に特異点をもつ Weierstrass のゼータ関数の定数倍がある．

ところで，任意の $(x,y)\in \mathbf{M}^L_{\omega_1,\omega_2}$ に対して，$D(x,y;\omega_1,\omega_2)$ は $L(\omega_1,\omega_2)$ の点をただひとつだけ含む．したがって，

$$\Phi^A_{\omega_1,\omega_2}(x,y)=2\pi c,\qquad (x,y)\in \mathbf{M}^L_{\omega_1,\omega_2}.$$

ゆえに，

$$U_j(c):=T_j(\omega_j),\quad j=1,2, \tag{5.18}$$

とおけば，定理3.4と(5.4)により，

$$U_1(c)U_2(c)=e^{-2\pi ic}U_2(c)U_1(c) \tag{5.19}$$

が得られる．これは，$\pi_c:=\{U_j(c)\}_{j=1}^2$が，変形パラメーター $q=e^{-2\pi ic}$の量子平面（回転代数）のユニタリ表現であることを示している[17]．こうして，量子平面のユニタリ表現の1パラメーター族 $\{\pi_c\}_{c\in\mathbf{R}}$が構成される．容易にわかるように，$c\neq c'$ならば，$\pi_c$と$\pi_{c'}$はユニタリ同値ではない．

定理3.2とスペクトル定理を用いることにより，次の事実を証明できる．

命題 5.4 任意の $c\in\mathbf{R}$ に対して，π_c-不変な，$L^2(\mathbf{R}^2)$ の非自明な有限次元部分空間は存在しない．

この命題は，表現π_cの任意の既約成分が無限次元であるということを意味する．こうして，量子平面の表現π_cは本質的に無限次元であることがわかる．したがって，これらは，[30, 20] において論じられた量子平面の表現—これらは有限次元表現— と同値ではない．この意味でも表現π_cは興味深い．

量子平面の表現があたえられると，これから量子群 $U_q(sl_2)$ の表現を構成する方法がある．詳細については，[7] を参照されたい．

6 他の側面

最後に，この論文で考察したゲージ理論のもつ他の側面や発展性について簡単にふれておく．

6.1 非相対論的ハミルトニアンと Dirac-Weyl 演算子の解析

A が平坦であり，CCR の表現π_Aが非同値表現である場合に，これを用いて展開される量子力学の内容がどのようなものであるかを探究することは興味がある[18]．このような探究の重要な対象として，表現π_Aに付随する非相対論的ハミルトニアン

$$H:=\frac{1}{2m}\left(\bar{P}_1^2+\bar{P}_2^2\right) \tag{6.1}$$

[17] 量子平面や以下で言及する量子群については，たとえば，[19] を参照．

[18] π_Aが Schrödinger 2-系である場合は，これから定義される量子力学の内容は，自由粒子の理論と同等である．

と Dirac-Weyl 型演算子

$$\not{D} = \sigma_1 \otimes \bar{P}_1 + \sigma_2 \otimes \bar{P}_2 \tag{6.2}$$

がある．ここで，$m > 0$ は質量パラメーター，σ_1, σ_2はバウリ行列である．

Hに関しては，$A_j \in C_0^\infty(\mathbf{M}; \mathbf{C}^p)\, j = 1, 2,$ であって，CCR の表現π_Aが Schrödinger 2-系でない場合，Hは $C_0^\infty(\mathbf{M}; \mathbf{C}^p)$ 上で本質的に自己共役でないことがわかる [4]．したがって，この場合，Hの $C_0^\infty(\mathbf{M}; \mathbf{C}^p)$ への制限 $H_{\min} := H_{C_0^\infty(\mathbf{M}; \mathbf{C}^p)}$ は複数の異なる自己共役拡大をもつ可能性がある．そこで，Hに関する基本的な問題のひとつは，

(H.1) $H_{\min}$の自己共役拡大をすべて決定すること

である．これは未解決問題である．

$H_{\min}$のある意味で自然な自己共役拡大は容易に見いだすことができる．実際，ヒルベルト空間上の 2 次形式の理論（たとえば，[27, §VIII.6]）を応用することによって，

$$D\left(\widetilde{H}^{1/2}\right) = D(\bar{P}_1) \cap D(\bar{P}_2), \tag{6.3}$$

$$(\widetilde{H}^{1/2}\Psi, \widetilde{H}^{1/2}\Phi) = \frac{1}{2m}\left\{(\bar{P}_1\Psi, \bar{P}_1\Phi) + (\bar{P}_2\Psi, \bar{P}_2\Phi)\right\}, \quad \Psi, \Phi \in D\left(\widetilde{H}^{1/2}\right), \tag{6.4}$$

をみたす非負自己共役演算子$\widetilde{H}$がただひとつ存在することがわかる．これは，Hのひとつの自己共役拡大をあたえる．この場合，興味ある問題として次のものがある：

(H.2) $\widetilde{H}$のスペクトルを同定せよ．

(H.3) $e^{-t\widetilde{H}}$の積分核（熱核）$e^{-t\widetilde{H}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ の存在を示し，その $t \to 0$ における漸近展開を求めよ．

Dirac-Weyl 演算子 $\not{D}$ に関しては，次の問題が完全に解かれることが望まれる：

(D.1) $\not{D}$ は本質的に自己共役であるか？

(D.2) $\not{D}$のスペクトル解析．特に，$\not{D}$の零エネルギー状態の同定．

問題 (D.1) は，ゲージ場が特異性をもちうるために，全然自明ではない．(D.2) については，$\not{D}$によって記述される超対称的量子力学を考察する上で特に興味がある．これらの問題に対するいくつかの部分的解答は [3, 6] においてあたえられた．特に，Aの特異点の数が N個 ($N < \infty$) の場合，$\not{D}$のある自己共役拡大の零エネルギー状態は非自明な縮退をもち，ある付加的な条件のもとで，その縮退度は，$N \to \infty$ のとき，無限大になることが示される．こうした数理的構造に対応する物理現象（ AB 効果に付随して起こるべき物理現象）が何かあるはずであるが，それがどういうものであるか，いまのところ，筆者にはわからない．ご存知の方は教えていただければ有り難い．

6.2 無限格子系との関連

通常，無限格子上の量子系のモデルは，ある種の物理的描像に基づいて，何らかの特別の仮定を手でいれてつくられる．量子力学の原理に基づいて，あらゆる現象を論理的に首尾一貫した形で厳密に認識しようとする観点からは，このような状況は明らかに不満足なものである．したがって，このような観点からは，連続的な空間上の量子力学から格子系のモデルが自ずと派生する機構が存在するかどうかを調べることは重要である．この論文で考察したゲージ理論に関しては，少なくとも，$p=1$ の場合には，そのような機構が実際存在することを示すことができる．以下，その概略を述べる．

$U(1)$-ゲージ理論において，5.4 項のように，ゲージ場の特異点が無限格子 $L:=L(\omega_1,\omega_2)$ を形成する場合を考える．このとき，L 上の量子系を考えることができる．この格子量子系の状態のヒルベルト空間は

$$\ell^2(L):=\{\psi=\{\psi(\boldsymbol{\Omega}_{m,n})\}_{m,n\in\mathbf{Z}}|\psi(\boldsymbol{\Omega}_{m,n})\in\mathbf{C},\ m,n\in\mathbf{Z},\ \sum_{m,n\in\mathbf{Z}}|\psi(\boldsymbol{\Omega}_{m,n})|^2<\infty\} \tag{6.5}$$

によってあたえられる．

頂点を $\boldsymbol{\Omega}_{m,n},\boldsymbol{\Omega}_{m+1,n},\boldsymbol{\Omega}_{m+1,n+1},\boldsymbol{\Omega}_{m,n+1}$ とする長方形の内部を $\mathbf{S}_{m,n}$ とし，その定義関数を $\chi_{m,n}$ とする．各 $\mathbf{S}_{m,n}$ 上で一定の値をとる，$L^2(\mathbf{R}^2)$ の元の全体を $L^2_{\omega_1,\omega_2}(\mathbf{R}^2)$ としよう．これは，$L^2(\mathbf{R}^2)$ の閉部分空間である．このとき，

$$U\psi:=\sum_{n,m\in\mathbf{Z}}\psi(\boldsymbol{\Omega}_{m,n})\chi_{m,n},\quad \psi\in\ell^2(L),$$

によって定義される写像 $U:\ell^2(L)\to L^2_{\omega_1,\omega_2}(\mathbf{R}^2)$ はユニタリである．この意味で，$\ell^2(L)$ と $L^2_{\omega_1,\omega_2}(\mathbf{R}^2)$ は同一視される．したがって，もし，$L^2(\mathbf{R}^2)$ 上の演算子で $L^2_{\omega_1,\omega_2}(\mathbf{R}^2)$ によって簡約されるものがあれば，その簡約部分は，格子量子系の演算子をあたえる．このような場合，連続空間上の量子系の理論から，理論自体の内的構造として，格子上の量子系の理論が導かれることになる．これが上に言及した機構の意味である．

実際，あるクラスのベクトルポテンシャルに対しては，ユニタリ演算子 $T_j,T_j^{-1},j=1,2,$ が $L^2_{\omega_1,\omega_2}(\mathbf{R}^2)$ によって簡約されることを証明することができる [10]．この場合，その簡約部分は，格子 L 上に磁場がかかった量子系の磁気並進演算子 (magnetic translation) をあたえる[19]．これらの演算子は，いわゆる **Hofstadter** 型のモデルを定義する（たとえば，[18, 30, 20] を参照）．こうして，格子空間 L 上の Hofstadter 型のモデルを連続的な量子系の簡約部分として導出することができる．詳細については，[10] を参照されたい．

[19]磁気並進に関する研究は，たとえば，[11, 13, 14, 30, 20] に見いだされる．

参考文献

[1] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.* **115**(1959), 485–491.

[2] A. Arai, Momentum operators with gauge potentials, local quantization of magnetic flux, and representation of canonical commutation relations, *J. Math. Phys.* **33**(1992), 3374–3378.

[3] A. Arai, Properties of the Dirac-Weyl operator with a strongly singular gauge potential, *J. Math. Phys.* **34**(1993), 915–935.

[4] A. Arai, Operator-theoretical analysis of a representation of a supersymmetry algebra in Hilbert space, *J. Math. Phys.* **36**(1995), 613–621.

[5] A. Arai, Gauge theory on a non-simply conneted domain and representations of canonical commutation relations, *J. Math. Phys.* **36**(1995), 2569–2580.

[6] A. Arai, Representation of canonical commutation relations in a gauge theory, the Aharonov-Bohm effect, and the Dirac-Weyl operator, *J. Nonlinear Math. Phys.* **2**(1995), 247-262.

[7] A. Arai, Canonical commutation relations in a gauge theory, the Weierstrass Zeta-function, and infinite dimensional Hilbert space representations of the quantum group $U_q(sl_2)$, *J. Math. Phys.* **96**(1996), 4203–4218.

[8] 新井朝雄，『ヒルベルト空間と量子力学』(共立講座　２１世紀の数学１６)，共立出版社，1997.

[9] 新井朝雄，ゲージ理論における正準交換関係の表現とアハラノフ-ボーム効果，荒木不二洋編『数理物理への誘い２』(遊星社，1997）の pp.165–190.

[10] A. Arai, Representation-theoretic aspects of two-dimensional quantum systems in singular vector potentials: canonical commutation relations, quantum algebras, and reduction to lattice quantum systems, Preprint, 1997.

[11] E. Brown, Bloch electrons in a uniform electromagnetic field, *Phys. Rev.* **133**(1964), A1038–A1044.

[12] J. D. Dollard and C. N. Friedman, *Product Integration*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applicaiton Vol. 10: Analysis, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1979.

[13] W. Florek, Magnetic translation groups as group extensions, *Rep. Math. Phys.* **34**(1994), 81–95.

[14] W. Florek, Magnetic translation groups in n dimensions, *Rep. Math. Phys.* **38**(1996), 235-250.

[15] M. Göckler and T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[16] G. A. Goldin, R. Menikoff and D. H. Sharp, Representations of a local current algebra in nonsimply connected space and the Aharonov-Bohm effect, *J. Math. Phys.* **22**(1981), 1664–1668.

[17] M. Hirokawa, Canonical commutation relations. Heisenberg's or Weyl's ? in the light of the AB effect, preprint, 1995.

[18] D. R. Hofstadter, Energy levels and wave function of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, *Phys. Rev.* **B 14**(1976), 2239–2249.

[19] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer, New York, 1995.

[20] Ch. Kreft and R. Seiler, Models of the Hofstadter-type, *J. Math. Phys.* **37**(1996), 5207–5243.

[21] H. Kurose and H. Nakazato, Geometric construction of $*$-representation of the Weyl algebra with degree 2, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **32**(1996), 555–579.

[22] 黒田成俊,『スペクトル理論 II』(岩波講座　基礎数学　解析学 (II) xi), 岩波書店, 1979 .

[23] J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math.Ann.* **104**(1931), 570–578.

[24] 日本物理学会編,『量子力学と新技術』, 培風館, 1987 (初版) .

[25] 大貫義郎, アハラノフ－ボーム効果, 物理学最前線 9 (1985) , 1–64 , 共立出版.

[26] C. R. Putnam, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators*, Springer, Berlin, 1967.

[27] M. Reed and B. Simon, *Mehtods of Modern Mathematical Physics Vol.I*, Academic Press, New York, 1972.

[28] H. Reeh, A remark concerning canonical commutation relations, *J. Math. Phys.* **29**(1988), 1535–1536.

[29] N. M. Ruijsenaars, The Aharonov-Bohm effect and scattering theory, *Ann. of Phys.* **146**(1983), 1–34.

[30] P. B. Wiegmann and A. V. Zabrodin, Quantum groups and magnetic translations. Bethe ansatz for Asbel-Hofstadter problem, *Nuclear Phys.* **B 422**(1994), 495–514.